ＭＡ　Hoermander　多変数複素解析を読む　講義報告[3]

２００８年6月１４日（土）　１４：００−１６：００

開集合 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ のコンパクトしぼり出し列により、Ω 上の連続関数全体の集合 $C(\Omega)$ に自然な距離 d が入り、距離空間 $(C(\Omega), d)$ は完備でかつ、$(C(\Omega), d)$ の位相は、コンパクト一様収束の位相と一致する。前回証明した解析（正則）関数の L^1- ノルムと L^2- ノルムによる評価を用いて、Ω 上の解析（正則）関数の全体 $\mathcal{A}(\Omega)$ が $(C(\Omega), d)$ の閉部分空間になることを証明した。最後に、$Arzela-Ascoli$ の定理から、$Montel$ の定理を導いた。

定理 1.5. $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ を開集合とする。Ω のコンパクト集合列 $\{K_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ で、次の性質をもつものが存在する。

1. $K_1 \subset K_2^\circ \subset K_2 \subset \cdots \subset K_\nu \subset K_{\nu+1}^\circ \subset K_{\nu+1} \subset \cdots$
2. $\displaystyle\bigcup_{\nu\in\mathbb{N}} K_\nu = \Omega$
3. Ω 内の任意のコンパクト集合 K に対して、$K \subset K_{\nu_0}$ なる $\nu_0 \in \mathbb{N}$ が存在する。

このとき、集合列 $\{K_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ を Ω の**コンパクトしぼり出し列**と呼ぶ。

定理 1.6. $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ を開集合、$\{K_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ を Ω のコンパクトしぼり出し列とするとき、Ω 上の連続関数全体の集合 $C(\Omega)$ に自然な距離

$$d(f,g) = \sum_{\nu\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^\nu} \frac{\|f-g\|_{K_\nu}}{1+\|f-g\|_{K_\nu}} \quad for\ \forall f,g \in C(\Omega)$$

が存在し、$(C(\Omega), d)$ は完備距離空間になる。

定理 1.7. $(C(\Omega), d)$ の位相は、コンパクト一様収束の位相に一致する。すなわち、関数列 $\{f_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset C(\Omega)$ が $f \in C(\Omega)$ に距離 d について収束するための必要十分条件は、Ω 内の任意のコンパクト集合 K に対して、$\|f_\nu - f\|_K \to 0\ (\nu \to \infty)$ となることである。

定理 1.8. f を開集合 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 上の解析（正則）関数、K を Ω の任意のコンパクト集合とする。

1. $\omega \subset \Omega$ を K の相対コンパクトな開近傍とするとき、$\rho = d(K, \partial\Omega)$ と微分の階数 J のみに関係する定数 $C_{K,J} > 0$ が存在して
$$\left\|\partial^J f\right\|_K \leq C_{K,J} \|f\|_{L^1(\omega)}$$
を満たす。
2. $\omega \subset \Omega$ を K の相対コンパクトな開近傍とするとき、$\rho = d(K, \partial\Omega)$ と微分の階数 J のみに関係する定数 $C_{K,J} > 0$ が存在して
$$\left\|\partial^J f\right\|_K \leq C_{K,J} \|f\|_{L^2(\omega)}$$
を満たす。

[3]数学工房　http://www.sugakukobo.com/

定理 1.9. $\{f_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ を開集合 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 上の解析（正則）関数列とするとき、$\{f_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ が Ω 上の複素数値関数にコンパクト一様収束するならば、f は Ω 上の解析（正則）関数である。

系 1.2. 開集合 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 上の解析（正則）関数の全体 $\mathcal{A}(\Omega)$ は、$(C(\Omega), d)$ の閉部分空間である。

定義 1.4 (同程度連続). X を局所コンパクトなハウスドルフ空間とする。X 上の複素数値連続関数全体 $C(X,\mathbb{C})$ の部分集合 $\mathfrak{F}$ が X 上**同程度連続**であるとは、任意の $x_0 \in X$ を固定したとき、

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists V \in \mathfrak{V}(x_0) \quad such\ that \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad for\ \forall x \in V,\ \forall f \in \mathfrak{F}$$

が成立することである。ただし、$\mathfrak{V}(x_0)$ は x_0 の近傍全体とする。

定理 1.10 ($Arzela - Ascoli$ の定理). X を局所コンパクトなハウスドルフ空間とする。$\mathfrak{F} \subset C(X,\mathbb{C})$ が同程度連続で、任意の $x \in X$ に対して、$\{f(x) \mid f \in \mathfrak{F}\}$ が有界ならば、$\mathfrak{F}$ は $C(X,\mathbb{C})$ で相対コンパクトである。すなわち、$\mathfrak{F}$ の点にコンパクト一様収束する様な部分列が存在することである。

定理 1.11 ($Montel$ の定理). $\{f_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ が開集合 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 上の解析（正則）関数列で、Ω 内の任意のコンパクト集合 K に対して有界すなわち、$\|f_\nu\|_K \leq M$ $(\forall\nu \in \mathbb{N})$ なる $M > 0$ が存在するならば、部分列 $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ と Ω 上の解析（正則）関数 f が存在して、$\{f_{\tau(\nu)}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ は f にコンパクト一様収束する。

系 1.3. 一般に $\Phi \subset \mathcal{A}(\Omega)$ について、Φ がコンパクト一様収束位相で有界ならば、Φ は相対コンパクトである。

記録 by J.S